I Międzyszkolny Konkurs Matematyczny

im. Stefana Banacha

dla uczniów szkół średnich

Zespół Szkół Nr 1 im. Adama Mickiewicza w Lublińcu

42-700 Lubliniec, ul. Sobieskiego 22

12. czerwiec 2007 roku

1. W kwadracie o boku długości 1 z każdego wierzchołka poprowadzono ćwierć okręgu tak, że pole kwadratu zostało podzielone na dziewięć rozłącznych figur. Obliczyć pole każdej z tych figur.

2. Znaleźć wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania

$$\left[\frac{3x-4}{3}\right] = 4 - 2x.$$

3. Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych x, y, z spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + yz = 2005 \\ y + xz = 2006 \end{cases}$$

4. Dla jakich liczb naturalnych n można ze zbioru $\{n, n+1, n+2, \ldots, n^2\}$ wybrać cztery różne liczby a, b, c, d takie, że $ab = cd$?

5. Przez dowolny punkt wewnętrzny przekątnej AC danego prostokąta $ABCD$ poprowadzono proste równoległe do jego boków, które przecinają boki AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Udowodnić, że

a) proste LM i KN są równoległe,

b) odległość prostych równoległych LM i KN jest stała i nie zależy od wyboru punktu P,

c) dla obwodu d czworokąta $KLMN$ zachodzi nierówność $d \geqslant 2|AC|$.

Czas rozwiązywania: 90 minut

Wykonano edytorem LaTeX