Zespół Szkół nr 1 im. Adama Mickiewicza

ul. Sobieskiego 22 42-700 Lubliniec
tel. 034 351 14 33 kom. 782 992 645
www.mickiewicz.net.pl e-mail: lolubliniec@list.pl

ROZWIĄZANIE ZADANIA 1

Analizowaną funkcję możemy zapisać w postaci $f(x) = |x-3| - |x+2| + p$,

ponieważ $\sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$. **(1pkt)**

Dziedzinę funkcji stanowi zbiór liczb rzeczywistych. **(1pkt)**

Po rozpisaniu wartości bezwzględnych funkcję zapisujemy następująco

$$f(x) = \begin{cases} 5+p & \text{dla } x \in (-\infty, -2\rangle \\ -2x+p+1 & \text{dla } x \in (-2, 3\rangle \\ -5+p & \text{dla } x \in (3, +\infty) \end{cases}.$$ **(2pkt)**

Wyznaczamy dla jakich wartości parametru $p \in R$ funkcja ma miejsca zerowe.

1) $x \in (-\infty, -2\rangle$

$5 + p = 0 \Leftrightarrow p = -5$ **(1pkt)**

2) $x \in (-2, 3\rangle$

$-2x + p + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p+1}{2}$, gdzie $-2 < \frac{p+1}{2} \leq 3$, czyli $p \in (-5, 5\rangle$. **(2pkt)**

3) $x \in (3, +\infty)$

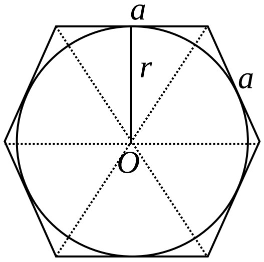
$-5 + p = 0 \Leftrightarrow p = 5$ **(1pkt)**

Otrzymujemy, że funkcja ma miejsca zerowe dla $p \in \langle -5, 5\rangle$, **(1pkt)**

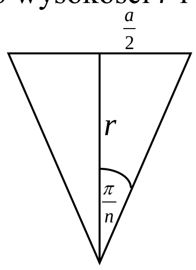
czyli brak miejsc zerowych dla $p \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$.

ROZWIĄZANIE ZADANIA 2

1) Rozważmy ciąg (a_n). Korzystając z poniższego rysunku



możemy zauważyć, że n-kąt foremny opisany na okręgu o promieniu r składa się z n trójkątów równoramiennych o wysokości r i kącie przy wierzchołku O równym $\frac{2\pi}{n}$.



(2pkt)

Zatem $tg\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{\frac{a}{2}}{r}$, czyli $a=2r\cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Pole trójkąta równe jest $P=\frac{1}{2}a\cdot r=r^2\cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$. **(1pkt)**

Zatem n-ty wyraz ciągu (a_n) ma postać $a_n=nr^2\cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$. **(1pkt)**

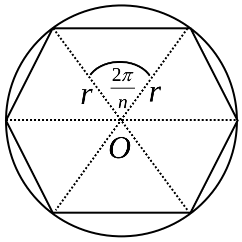
Obliczmy granicę ciągu (a_n)

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}nr^2\cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{nr^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nr^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nr^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi r^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Korzystając ze wskazówki mamy: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}=1$, ponadto $\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=1$

Zatem $\lim_{n\to\infty}a_n=\pi r^2$ **(2pkt)**

2) Rozważmy ciąg (b_n). Korzystając z poniższego rysunku



możemy zauważyć, że n-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu r składa się z n trójkątów równoramiennych o ramionach długości r i kącie pomiędzy nimi równym $\frac{2\pi}{n}$. **(2pkt)**

Pole jednego trójkąta równe jest $P = \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. **(1pkt)**

Stąd n-ty wyraz ciągu (b_n) ma postać $b_n = \frac{1}{2} n r^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. **(1pkt)**

Obliczmy granicę ciągu (b_n)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} n r^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} n r^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{n}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi r^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}$$

Korzystając ze wskazówki mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} = 1$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pi r^2$ **(2pkt)**

ROZWIĄZANIE ZADANIA 3

Niech

d – odległość środka kuli opisanej na stożku od podstawy stożka, $0 \le d < 1$,

h – wysokość stożka,

r – promień podstawy stożka, $0 < r \le 1$.

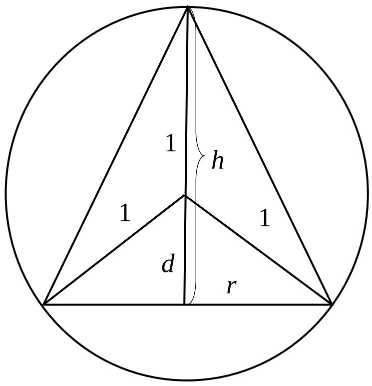
Możliwe są dwa przypadki: (1) $h = 1 + d$ lub (2) $h = 1 - d$.

Objętości stożków w powyższych przypadkach są następujące:

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 (1+d)$, $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (1-d)$.

Biorąc pod uwagę, że $0 \le d < 1$ mamy $V_1 \ge V_2$. Zatem wystarczy rozważyć stożki z przypadku (1). **(1pkt)**

Mamy wówczas stożki o przekroju osiowym jak na rysunku :



(1pkt)

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 (1+d)$ oraz $r^2 + d^2 = 1$.

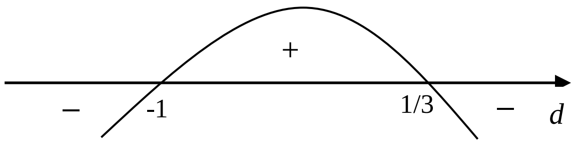
Stąd $r^2 = 1 - d^2$, a więc:

$V = V(d) = \frac{1}{3}\pi(1-d^2)(1+d) = \frac{1}{3}\pi(-d^3 - d^2 + d + 1)$, $0 \le d < 1$ **(2pkt)**

$V'(d) = \frac{1}{3}\pi(-3d^2 - 2d + 1)$

$V'(d) = 0 \Leftrightarrow -3d^2 - 2d + 1 = 0$

$\Delta = 16 \Rightarrow d_1 = \frac{2-4}{-6} = \frac{1}{3} \in [0,1)$, $d_2 = \frac{2+4}{-6} = -1 < 0$ **(2pkt)**



$V_{\max}(d) = V\left(\frac{1}{3}\right)$ **(2pkt)**

Stąd otrzymujemy:

$r = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $h = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ oraz $V_{\max} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{81}\pi$ **(2pkt)**

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4

$$(x+1)\dots(x+k)=k! \qquad (*)$$

Natychmiastowym rozwiązaniem równania jest liczba $x=0$. **(1pkt)**

Żadna z liczb całkowitych dodatnich nie spełnia równania. Jeśli bowiem $x \geq 1$, to

$(x+1)\dots(x+k) \geq 2\dots(k+1)=(k+1)!>k!$ $(k \geq 1)$ **(1pkt)**

Pozostają zatem do rozważenia liczby całkowite ujemne i mniejsze od $-k$, a więc $x<-k$. **(1pkt)**

Przypadek I

Jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to w iloczynie po lewej stronie równania (*) występuje k czynników ujemnych. Oznacza to, że ten iloczyn jest ujemny i nie może być równy $k!$ **(2pkt)**

Przypadek II

Niech k będzie liczbą parzystą. Wtedy liczba $x=-k-1$ jest rozwiązaniem równania (*). Istotnie, wstawiając $x=-k-1$ do (*) dostajemy

$$(-k-1+1)\dots(-k-1+k)=(-k)\dots(-1)=(-1)^k k!=k! \quad \text{(bo } k \text{ parzyste)}$$ **(2pkt)**

Pozostaje sprawdzić, że żadna liczba mniejsza od $-k-1$ nie jest rozwiązaniem równania (*). Niech zatem $x=-k-p$, gdzie $p \geq 2$. Wtedy po wstawieniu do (*) dostajemy

$$(-k-p+1)\dots(-k-p+k)=\underbrace{[-(k+p-1)]\dots[-p]}_{k-\text{czynników}}=(-1)^k(k+p-1)\dots p=(k+p-1)\dots p=\frac{(k+p-1)!}{(p-1)!}>k!$$

(2pkt)

ROZWIĄZANIE ZADANIA 5

Rozwiążmy najpierw równanie

$$\log 3 + \left(2 + \frac{1}{2t}\right)\log 2 - \log\left(32 + 2^{\frac{1}{t}}\right) = 0$$

Założenie $t \neq 0$ **(1pkt)**

Korzystając z podstawowych własności logarytmów otrzymujemy

$$\log\left(3 \cdot 2^{2+\frac{1}{2t}}\right) = \log\left(32 + 2^{\frac{1}{t}}\right)$$

a zatem

$$3 \cdot 2^{2+\frac{1}{2t}} = 32 + 2^{\frac{1}{t}}$$

ostatecznie

$$12 \cdot 2^{\frac{1}{2t}} = 32 + 2^{\frac{1}{t}}$$ **(2pkt)**

Podstawiając $2^{\frac{1}{2t}} = u \quad (u > 0)$ oraz porządkując równanie względem u otrzymujemy

$$u^2 - 12 \cdot u + 32 = 0$$ **(1pkt)**

Dalej mamy

$$\Delta = 144 - 128 = 16, \ \sqrt{\Delta} = 4$$
$$u_1 = 4, \ u_2 = 8$$ **(1pkt)**

Wracając do t otrzymujemy kolejno

$$2^{\frac{1}{2t}} = 4 \quad \vee \quad 2^{\frac{1}{2t}} = 8$$
$$\frac{1}{2t} = 2 \qquad \frac{1}{2t} = 3$$
$$t = \frac{1}{4} \qquad t = \frac{1}{6}$$ **(2pkt)**

Zatem podstawy rozważanego trapezu są odpowiednio równe $a = \frac{1}{4}$ oraz $b = \frac{1}{6}$.

Korzystamy z własności: aby opisać czworokąt na okręgu, sumy długości przeciwległych boków muszą być równe. Stąd otrzymujemy długość ramienia

$$l = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}{2} = \frac{5}{24}$$ **(1pkt)**

Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy wysokość trapezu

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{576} - \frac{1}{576}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$ **(1pkt)**

Ostatecznie pole trapezu wynosi $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{5}{24} \cdot \frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{5\sqrt{6}}{288}$ **(1pkt)**