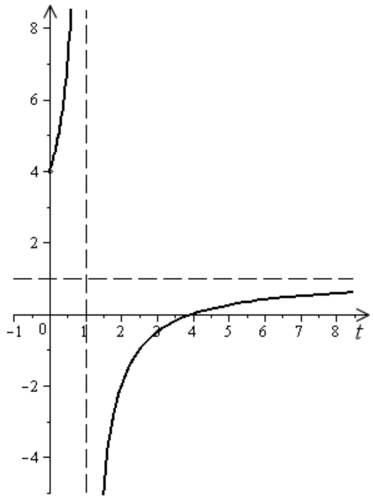
## ROZWIĄZANIE ZADANIA 1

Dziedzina funkcji $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ to zbiór $R\setminus\left\{-1,1\right\}$. **(1pkt)**

Funkcja jest parzysta, ponieważ dla każdego $x\in D_f$ $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$. **(1pkt)**

Zbiór wartości funkcji $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$, $x\in R\setminus\left\{-1,1\right\}$, jest taki sam jak zbiór wartości funkcji $g\left(t\right)=\dfrac{t-4}{t-1}$, $t\geq 0$ i $t\neq 1$, $\left(x^2=t\right)$. **(1pkt)**

Wykres funkcji $g\left(t\right)$: **(2pkt)**



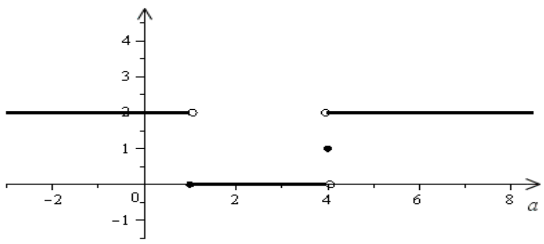

Otrzymujemy
$ZW_f=ZW_g=(-\infty,1)\cup\langle 4,\infty)$ **(1pkt)**

Dla $a\in\langle 1,4)$ równanie $g\left(t\right)=a$ nie ma rozwiązania, czyli brak rozwiązania równania $f\left(x\right)=a$. **(1pkt)**

Dla $a=4$ równanie $g\left(t\right)=a$ ma dokładnie jedno rozwiązanie zerowe, czyli równanie $f\left(x\right)=a$ ma dokładnie jedno rozwiązanie (zerowe). **(1pkt)**

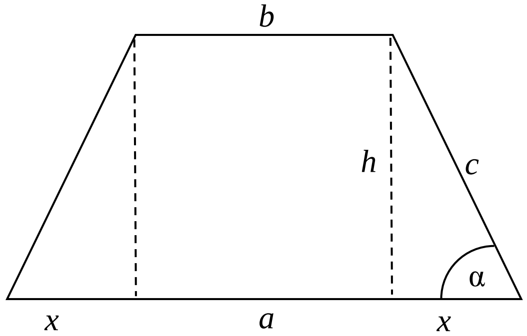
Dla $a\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$ równanie $g\left(t\right)=a$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie, czyli równanie $f\left(x\right)=a$ ma dwa rozwiązania. **(1pkt)**

Wykres liczby rozwiązań równania $f\left(x\right)=a$ w zależności od parametru $a\in R$: **(1pkt)**



### ROZWIĄZANIE ZADANIA 2

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku: **(1pkt)**
$a$ - dolna podstawa trapezu, $b$ – górna podstawa trapezu, $c$ – ramię trapezu.




Obwód trapezu wynosi $a+b+2c=2p$, czyli $a+b=2(p-c)$. **(1pkt)**

Wysokość trapezu $h=c\sin\alpha$. **(1pkt)**

Podstawiamy do wzoru na pole trapezu i otrzymujemy $P(c)=\dfrac{a+b}{2}h=(p-c)c\sin\alpha$. **(1pkt)**

Jest to funkcja kwadratowa, gdzie współczynnik przy $c^2$ wynosi $-\sin\alpha<0$, bo $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, czyli wartość maksymalna jest w wierzchołku dla $c=\dfrac{-p\sin\alpha}{-2\sin\alpha}=\dfrac{p}{2}$. **(1pkt)**

Wówczas

$$P_{\max}\left(\frac{p}{2}\right)=\left(p-\frac{p}{2}\right)\frac{p}{2}\sin\alpha=\frac{p^2}{4}\sin\alpha.$$ **(1pkt)**

Wyznaczamy długości podstaw trapezu dla $c=\dfrac{p}{2}$.

$$\begin{cases} a+b=2\left(p-\dfrac{p}{2}\right) \\ a=b+2x \end{cases}$$ **(1pkt)**

Korzystamy z faktu, że $x=c\cos a=\dfrac{p\cos\alpha}{2}$ i otrzymujemy **(1pkt)**

$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=p\cos\alpha \end{cases}$$ **(1pkt)**

Stąd

$$\begin{cases} a=\dfrac{p}{2}(1+\cos\alpha) \\ b=\dfrac{p}{2}(1-\cos\alpha) \end{cases}$$ **(1pkt)**

## Rozwiązanie Zadania 3

Korzystając z podstawienia $x = t^{12}$ otrzymujemy

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)^3-27}{x-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\left(t^6+t^4+t^3\right)^3-27}{t^{12}-1}= \qquad \textbf{(2pkt)}$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{\left(t^6+t^4+t^3-3\right)\left(\left(t^6+t^4+t^3\right)^2+3\left(t^6+t^4+t^3\right)+9\right)}{(t-1)\left(t^{11}+t^{10}+t^9+\ldots+t+1\right)} \qquad \textbf{(4pkt)}$$

Przekształcamy wyrażenie $t^6+t^4+t^3-3$

$$t^6+t^4+t^3-3=t^6-1+t^4-1+t^3-1=$$

$$(t-1)\left(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1\right)+(t-1)\left(t^3+t^2+t+1\right)+(t-1)\left(t^2+t+1\right)= \qquad \textbf{(3pkt)}$$

$$(t-1)\left(t^5+t^4+2t^3+3t^2+3t+3\right)$$

Stąd

$$\lim_{t\to 1}\frac{\left(t^6+t^4+t^3-3\right)\left(\left(t^6+t^4+t^3\right)^2+3\left(t^6+t^4+t^3\right)+9\right)}{(t-1)\left(t^{11}+t^{10}+t^9+\ldots+t+1\right)}=$$

**(1pkt)**

$$\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\left(t^5+t^4+2t^3+3t^2+3t+3\right)\left(\left(t^6+t^4+t^3\right)^2+3\left(t^6+t^4+t^3\right)+9\right)}{(t-1)\left(t^{11}+t^{10}+t^9+\ldots+t+1\right)}=$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{\left(t^5+t^4+2t^3+3t^2+3t+3\right)\left(\left(t^6+t^4+t^3\right)^2+3\left(t^6+t^4+t^3\right)+9\right)}{\left(t^{11}+t^{10}+t^9+\ldots+t+1\right)}=\frac{13(9+9+9)}{12}=\frac{117}{4} \qquad \textbf{(1pkt)}$$

## Rozwiązanie Zadania 4

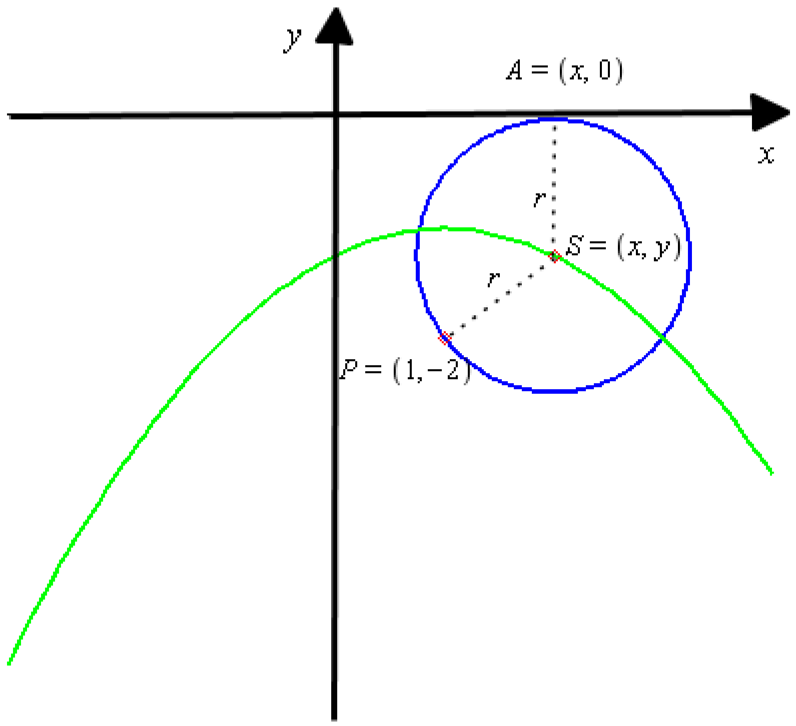
Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku:

$A=(x,0)$ - punkt styczności okręgu z osią O$x$,

$S=(x,y)$ - środek okręgu, gdzie $y<0$,

$P=(1,-2)$ - punkt należący do okręgu,

$r$ – promień okręgu.




**(2pkt)**

Korzystając ze wzoru na długość odcinka otrzymujemy

$|PS|=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$ **(1pkt)**

$|SA|=|y|$ **(1pkt)**

Jednocześnie zachodzi warunek

$|PS|=|SA|=r$ ,

Stąd

$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=|y|$ **(1pkt)**

czyli

$(x-1)^2+(y+2)^2=y^2$ **(1pkt)**

Zatem równanie szukanej krzywej ma postać

$y=\frac{1}{4}\left(-x^2+2x-5\right)$ **(1pkt)**

### ROZWIĄZANIE ZADANIA 5 (I SPOSÓB)

Rozważać będziemy następujące przypadki:
1) $x<0$
Biorąc pod uwagę powyższe założenie otrzymujemy
$-(x+x-1+x-2+...+x-99+x-100)=2550$
Korzystając ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego dostajemy
$101x-\frac{1+100}{2}\cdot 100=-2550$ **(1pkt)**

Stąd
$x=\frac{2500}{101}$
Z założenia $x<0$, zatem w tym przypadku równanie nie ma rozwiązania. **(1pkt)**

2) $x\geq 100$
W tym przypadku mamy
$x+x-1+x-2+...+x-99+x-100=2550$
Stąd otrzymujemy kolejno
$101x-\frac{1+100}{2}\cdot 100=2550$ **(1pkt)**

$x=\frac{7600}{101}=75+\frac{25}{101}$
Z założenia $x\geq 100$, więc w tym przypadku również równanie nie ma rozwiązania. **(1pkt)**

3) $x\in[i,\ i+1)$, gdzie $i$=0,1,…,99.
Równanie zapiszemy następująco
$|x|+|x-1|+|x-2|+...+|x-i|+|x-(i+1)|+...+|x-99|+|x-100|=2550$
Zauważmy, że lewą stronę powyższego równania można zapisać w postaci $S_1+S_2$, gdzie
$S_1=|x|+|x-1|+|x-2|+...+|x-i|$ oraz $S_2=|x-(i+1)|+...+|x-99|+|x-100|$
Dla każdego $x\in[i,\ i+1)$, $i$=0,1,…,99 mamy
$S_1=x+x-1+x-2+...+x-i$
$S_2=-(x-(i+1)+...+x-99+x-100)$ **(1pkt)**

Korzystając dwukrotnie ze wzoru na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego dostajemy
$S_1=(i+1)x-\frac{1+i}{2}\cdot i$ oraz $S_2=-\left((100-i)x-\frac{i+1+100}{2}\cdot(100-i)\right)$
Tym samym równanie przyjmuje postać
$(i+1)x-\frac{1+i}{2}\cdot i-\left((100-i)x-\frac{i+1+100}{2}\cdot(100-i)\right)=2550$ **(1pkt)**

a jego rozwiązanie jest następujące
$x=\frac{i^2+i-2500}{2i-99}$ **(1pkt)**

Należy teraz sprawdzić, dla jakich wartości $i$ otrzymane rozwiązanie należy do przedziału $[i,\ i+1)$.

**CIĄG DALSZY ROZWIĄZANIA ZADANIA 5 (I SPOSOBEM)**

W tym celu rozwiązujemy nierówności

I) $\frac{i^2+i-2500}{2i-99} \geq i$ oraz II) $\frac{i^2+i-2500}{2i-99} < i+1$

Ad. I)

Rozważaną nierówność sprowadzamy do postaci

$$\frac{-i^2+100i-2500}{2i-99} \geq 0$$

Dla wielomianu z licznika powyższej nierówności otrzymujemy

$\Delta = 100^2 - 4 \cdot 2500 = 0$, $i_1 = i_2 = 50$

Zatem nierówność przyjmuje postać

$$\frac{-(i-50)^2}{2i-99} \geq 0$$

Stąd $i \in \left(-\infty, \frac{99}{2}\right) \cup \{50\}$ **(2pkt)**

Ad. II)

Rozważaną nierówność sprowadzamy do postaci

$$\frac{-i^2+98i-2401}{2i-99} < 0$$

Dla wielomianu z licznika powyższej nierówności otrzymujemy

$\Delta = 98^2 - 4 \cdot 2401 = 0$, $i_1 = i_2 = 49$

Zatem nierówność przyjmuje postać

$$\frac{-(i-49)^2}{2i-99} < 0$$

Stąd $i \in \left(\frac{99}{2}, \infty\right)$ **(2pkt)**

Biorąc pod uwagę część wspólną rozwiązań nierówności I oraz II otrzymujemy $i$=50.

Podstawiając 50 w miejsce $i$ do wyrażenia

$$x = \frac{i^2+i-2500}{2i-99}$$

dostajemy $x$=50.

Odp. Rozwiązanie równania ma postać $x$=50. **(1pkt)**

### ROZWIĄZANIE ZADANIA 5 (II SPOSÓB)

W celu rozwiązania zadania można wykorzystać symetrię wykresu funkcji:

$f(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-99| + |x-100|, \qquad x \in \mathbb{R}$ (1p)

względem prostej $x = 50$.

Funkcja $f$ jest symetryczna względem prostej $x = 50$, tzn.: zachodzi związek

$f(50-x) = f(x+50)$ dla $x \in \mathbb{R}$

$$f(50-x) = |50-x| + |49-x| + |48-x| + \ldots + |-49-x| + |-50-x| =$$
$$= |x-50| + |x-49| + |x-48| + \ldots + |x+49| + |x+50|$$ (2p)

$$f(x+50) = |x+50| + |x+49| + \ldots + |x-49| + |x-50|$$

Przyjmuje ona zatem identyczne wartości w punktach:

$f(0) = f(100) = 1 + \ldots + 100$

$f(1) = f(99) = 1 + (1 + \ldots + 99)$

$f(2) = f(98) = 1 + 2 + (1 + \ldots + 98)$

…

$f(49) = f(51) = 1 + \ldots 49 + (1 + \ldots + 51)$

oraz wartość $f(50) = 1 + \ldots + 50 + 1 + \ldots + 50 = 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 2550$ (2p)

tworzące ciąg malejący. Mamy bowiem:

$$f(n+1) - f(n) = 1 + \ldots + n + n + 1 + (1 + \ldots + 100 - n - 1)$$
$$= [1 + \ldots + n + (1 + \ldots + 100 - n - 1 + 100 - n)] =$$
$$= n + 1 - 100 + n = 2n - 99 \qquad n = 0, \ldots, 49$$ (2p)

A więc $f(n+1) - f(n) < 0$ dla $n = 0, \ldots, 49$ (1p)

Funkcja $f$ jest ciągła i przedziałami liniowa. (1p)

Co więcej, jest malejąca w przedziale $(-\infty, 50]$ (1p)

Łączy bowiem odcinki o końcach $(n, f(n))$ oraz $(n+1, f(n+1))$ dla $n = 0, \ldots, 49$ ,

a dla $x \le 0$ ma postać

$f(x) = -x - x + 1 - x + 2 - \ldots - x + 99 - x + 100 = -101x + 1 + \ldots + 100$ (1p)

Z symetrii względem prostej x=50 wynika, że funkcja jest rosnąca w przedziale $[50, \infty)$. Oznacza to, że jedynym rozwiązaniem równania jest $x = 50$ (1p)